ADVANCED TECHNIQUES

FOR

MULTIPARTON LOOP CALCULATION

-- A mini Review

Z. Bern
L. Dixon
D. Dunbar
D. Kosower

QCD *is* the theory of the strong interactions.

The era of *testing QCD* is over.

We are in the era of using QCD, and in particular jet physics,

- To search for new physics,
- To measure non-perturbative hadronic quantities.

For these purposes, we need precise calculations in perturbative QCD; next-to-leading order ones are a bare minimum.

IN MATRIX ELEMENT CALCULATIONS

Tree level analytically up to 7 partons or 6 + vector boson
Berends, Giele, Kuijf, Tausk
Leading-order predictions for $p\bar{p} \to \leq 5$ jets or V+≤
Kuijf BG+

all-n for certain helicities & external particles
Parke, Taylor, Mangano; Berends & Giele; DAK.

numerically recurrence relations for all-n with ≤ 4 external qu
Berends, Giele.

One loop analytically 4 partons (unpolarized) Ellis & Sexton
V + 3 partons (unpolarized) Ellis, Ross, Terrano; Ali et al.
Gonsalves
V + 3 partons (polarized) Giele & Glover
4 partons (polarized) Bern & DAK; Kunszt, Signer, Tróc
5 partons Bern, Dixon, DAK; Kunszt, Signer, Tro
Next-to-leading order predictions for $p\bar{p} \to 2$ jets
Aversa, Chiappetta, Greco, Guillet; Ellis, Kunszt, S
Giele, Glover, DAK

for $e^+e^- \to \leq 3$ jets Kunszt & Nason; Giele & Glover;
Catani & Seymour

for $ep \to 2$ jets + remnant Mirkes & Zeppenfeld;
Catani & Seymour

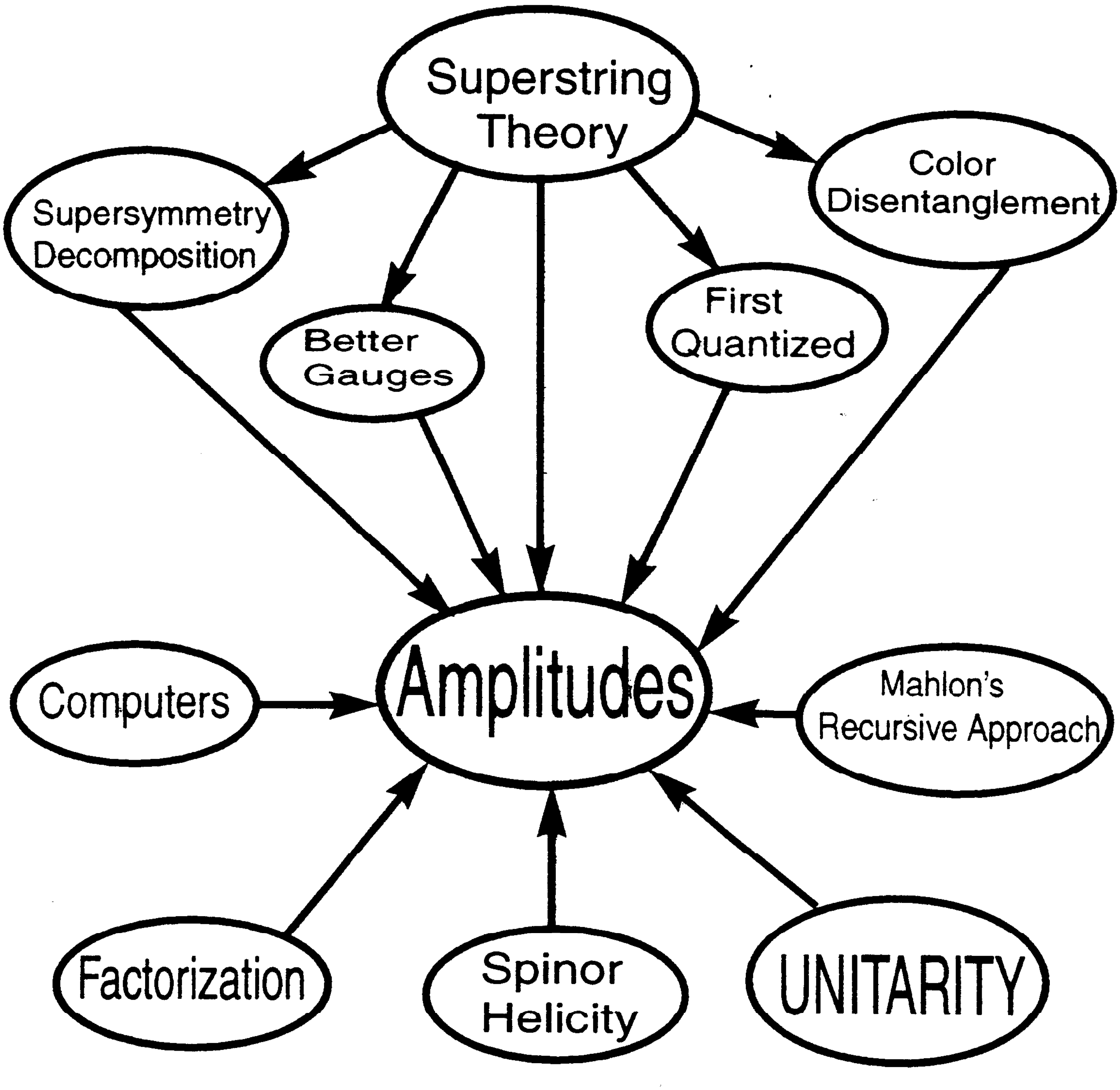
[illegible]
Giele & Kilgore Kunszt, Frixione, Signer; Trocsanyi; D.

[illegible] Bern, Dixon, DAK, Weinzierl
Glover & Miller

all-n formulae for certain helicities
Bern, Dixon, Dunbar, DAK; Mahlon

Two loops 2 partons + V
van Neerven et al

Non-Traditional Approaches



Power of methods magnified when ideas are combined.

SPINOR PRODUCTS

Kleiss, Stirling; Xu, Zhang, Chang.

Ultimately, we need the square of the amplitude. If we square it analytically, using $\sum_i \varepsilon_\mu^{*(i)} \varepsilon_\nu^{(i)} = g_{\mu\nu}$, we get a huge number of terms (at least in intermediate stages), and a less than optimally compact final answer. Ideally, we would square numerically; but how can we evaluate the amplitude numerically?

Introduce spinor products $\bar{u}(k_1)\, u(k_2) \equiv \langle 12 \rangle = \langle 1^- | 2^+ \rangle$

$\hookrightarrow$ massless $k_i^2 = 0$

These can be evaluated numerically,

$$\langle 12 \rangle = \sqrt{\frac{k_{1+}}{k_{2+}}}\,(k_{2x} + i\, k_{2y}) - \sqrt{\frac{k_{2+}}{k_{1+}}}\,(k_{1x} + i\, k_{1y})$$

$$[12] = -\,\mathrm{sign}(k_1^0 k_2^0)\, \langle 12 \rangle^*$$

$$k_{1+} = k_1^0 + k_1^z$$

are antisymmetric & the $\sqrt{\ }$ of a Lorentz product:

$$\langle 12 \rangle [21] = 2\, k_1 \cdot k_2$$

Define representation for polarization vectors,

$$\varepsilon_\mu^{(+)} = \frac{\langle q^- | \gamma_\mu | k^- \rangle}{\sqrt{2}\, \langle q k \rangle}\ , \quad \varepsilon_\mu^{(-)} = \frac{\langle q^+ | \gamma_\mu | k^+ \rangle}{\sqrt{2}\, [q k]}$$

where q is an arbitrary null reference momentum. Changing q shifts ε by λk — i.e. it is a gauge transformat

$$((4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3k_4\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1k_5\cdot\varepsilon_4$$
$$+ 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1k_5\cdot\varepsilon_4 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_4$$
$$+ 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_5\cdot\varepsilon_4 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_5k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 - 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4$$
$$+ 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4k_5\cdot\varepsilon_4 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_3 - 4ik_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_2$$
$$+ 4ik_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3k_4\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_2\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3k_3\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_2\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5$$
$$- 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_3k_4\cdot\varepsilon_2\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4k_4\cdot\varepsilon_1\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4k_3\cdot\varepsilon_1\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3$$
$$- 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3k_4\cdot\varepsilon_2 + 4ik_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1 + 4ik_1\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1$$
$$+ 4ik_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_4\cdot\varepsilon_1 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1 + 4ik_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1 - 4ik_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1$$
$$+ 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot k_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot k_5 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot k_5 + 4ik_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5$$
$$+ 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_5 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5 - 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5 + 4ik_1\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5$$
$$+ 4ik_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot k_5k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4$$
$$+ 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1 + 4ik_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1$$
$$- 4ik_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_1 - 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_1 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot k_5 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot k_5$$
$$+ 4ik_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5 - 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5 + 4ik_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5 - 4ik_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5$$
$$+ 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4 - 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3 + 4ik_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3)/$$
$$+ (4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4$$
$$+ 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_4k_5\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_3 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_4k_4\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_3 - 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_4k_4\cdot\varepsilon_1k_5\cdot\varepsilon_3$$
$$- 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_3\cdot\varepsilon_4k_5\cdot\varepsilon_3 - 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_4k_5\cdot\varepsilon_3 - 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_4k_5\cdot\varepsilon_3 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_4k_5\cdot\varepsilon_3 + 4ik_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_2$$
$$+ 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot k_5k_5\cdot\varepsilon_2 - 4ik_1\cdot\varepsilon_3\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_4k_5\cdot\varepsilon_2 + 4ik_1\cdot k_3\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_5\cdot\varepsilon_2 + 4ik_4\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_3\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5$$
$$+ 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3$$
$$+ 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_3 + 4ik_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_3 + 4ik_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_3$$
$$+ 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot k_5k_4\cdot\varepsilon_3 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3 + 4ik_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_4\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3$$
$$+ 4i\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_2 - 4ik_3\cdot\varepsilon_4\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_2 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot k_5k_4\cdot\varepsilon_2 + 4ik_3\cdot\varepsilon_1\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_2 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_2$$
$$- 4ik_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_4\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_2 - 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_4\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_2 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_4k_4\cdot\varepsilon_2 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_4\cdot\varepsilon_2 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot k_5k_4\cdot\varepsilon_1$$
$$+ 4ik_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1 - 4ik_3\cdot\varepsilon_2k_3\cdot\varepsilon_4\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1 - 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_4k_4\cdot\varepsilon_1 - 4ik_1\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_4k_4\cdot\varepsilon_1 + 4ik_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_4\cdot\varepsilon_1$$
$$+ 4ik_1\cdot k_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_4\cdot\varepsilon_1 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot k_5 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot k_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot k_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot k_5$$
$$+ 4ik_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5 - 4ik_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2k_3\cdot\varepsilon_4\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5 - 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2k_3\cdot\varepsilon_4\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_3\cdot\varepsilon_4$$
$$- 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_4 - 4ik_1\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_4 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_5k_3\cdot\varepsilon_4 - 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_4 - 4ik_1\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_4$$
$$- 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_3\cdot\varepsilon_4 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_4 + 4ik_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot k_5k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4$$
$$+ 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4ik_1\cdot k_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4ik_1\cdot k_3k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot k_3k_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4)/$$
$$+ 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_5\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_1 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_1\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4)/(2k_1\cdot k_5)$$
$$+ ((4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3k_4\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_4$$
$$+ 4ik_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_5\cdot\varepsilon_4 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_5\cdot\varepsilon_4$$
$$+ 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_5k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 - 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4k_5\cdot\varepsilon_4 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4$$
$$+ 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_1\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_2k_3\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_5\cdot\varepsilon_3$$
$$- 4ik_2\cdot\varepsilon_3k_4\cdot\varepsilon_1\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_2 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_3k_3\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_2 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_2 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_2 + 4ik_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5$$
$$+ 4ik_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3k_4\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_2\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3k_3\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_2\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 - 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_3k_4\cdot\varepsilon_2\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5$$
$$+ 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_5k_4\cdot\varepsilon_1\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4k_4\cdot\varepsilon_1\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot k_4k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4k_3\cdot\varepsilon_1\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5$$
$$- 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot k_4k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_1\cdot k_4k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_2k_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3$$
$$- 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_3k_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_2 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_2 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3k_4\cdot\varepsilon_2 + 4ik_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5$$
$$+ 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_2k_3\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_5 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_5k_3\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4k_3\cdot\varepsilon_5$$
$$+ 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5 - 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_3k_3\cdot\varepsilon_5 + 4ik_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_3\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4$$
$$+ 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_2$$
$$+ 4i\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1 - 4ik_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_3\cdot\varepsilon_1 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_1 - 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_1 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_2\cdot k_5$$
$$+ 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4k_2\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5 - 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5$$
$$+ 4ik_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_4 - 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1k_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4 - 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_3$$
$$+ 4ik_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3)/k_2\cdot k_3$$
$$+ (4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4$$
$$- 4ik_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2k_3\cdot\varepsilon_1\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot k_3\varepsilon_3\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4$$
$$+ 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_2\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_5\cdot\varepsilon_4 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_4$$
$$+ 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_2\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_1\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot k_4\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3$$
$$- 4ik_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3 + 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_5\cdot\varepsilon_3$$
$$+ 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_5\cdot\varepsilon_3 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5$$
$$- 4ik_1\cdot\varepsilon_2k_3\cdot\varepsilon_1k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot k_4k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot k_3k_4\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5$$
$$- 4ik_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_2\cdot k_4\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_1\cdot k_4k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot k_4\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_3k_1\cdot k_4\varepsilon_4\cdot\varepsilon_5 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3$$
$$+ 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_2\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3$$
$$+ 4ik_1\cdot\varepsilon_5k_2\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\varepsilon_4k_4\cdot\varepsilon_3 + 4i\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2k_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2\varepsilon_1\cdot\varepsilon_4k_1\cdot\varepsilon_5k_4\cdot\varepsilon_3 + 4ik_2\cdot\varepsilon_1k_3\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5 - 4ik_1\cdot\varepsilon_2k_3\cdot\varepsilon_1\varepsilon_3\cdot\varepsilon_4k_3\cdot\varepsilon_5$$

$$
\begin{aligned}
A_5(+ + + + +) &= 0 \\
A_5(- + + + +) &= 0 \\
A_5(- - + + +) &= \frac{i \langle 1\,2 \rangle^4}{\langle 1\,2 \rangle \langle 2\,3 \rangle \langle 3\,4 \rangle \langle 4\,5 \rangle \langle 5\,1 \rangle} \\
A_5(- + - + +) &= \frac{i \langle 1\,3 \rangle^4}{\langle 1\,2 \rangle \langle 2\,3 \rangle \langle 3\,4 \rangle \langle 4\,5 \rangle \langle 5\,1 \rangle}
\end{aligned}
$$

- Color decomposition

$$\mathcal{A}^{tree}_{n+V} = g^{n-2} \sum_{\sigma \in S_{n-2}} \left(T^{a_{\sigma(3)}} \cdots T^{a_{\sigma(n)}}\right)_{i_2}^{\bar{\imath}_1} A^{tree}_{n+V}(1_q, 2_{\bar{q}}; \sigma(3..n); \ell_1$$

- Helicity amplitudes, using spinor products $\langle ij \rangle$, $[ij]$

$$\langle ij \rangle [ji] = 2\, k_i \cdot k_j$$

Partial or color-ordered sub-amplitudes A^{tree}_n

- are gauge invariant
- satisfy [illegible] identities
- [illegible]
- have simple soft and collinear limits, useful for building universal functions summarizing $\int$ over soft & collinear phase space.

Collinear limits

$$A^{tree}_n(1,\ldots,n-2,a^{\lambda_a},b^{\lambda_b}) \xrightarrow{a \parallel b} \sum_{\lambda_P = \pm} C^{tree}_{-\lambda_P}(a^{\lambda_a},b^{\lambda_b})\, A^{tree}_{n-1}(1,\ldots,n-2,$$

$$k_a = z\, k_P\,, \quad k_b = (1-z)\, k_P\,, \qquad C \sim \sqrt{\text{AP fcns}}$$

e.g. gluons

$$C^{tree}_{+}(a^+,b^+) = 0 = C^{tree}_{-}(a^-,b^-),$$

$$C^{tree}_{-}(a^+,b^+) = \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}\,\langle ab \rangle}, \qquad C^{tree}_{+}(a^-,b^-) = \frac{-1}{\sqrt{z(1-z)}\,[ab]}$$

$$C^{tree}_{-}(a^+,b^-) = \frac{z^2}{\sqrt{z(1-z)}\,[ab]}, \qquad C^{tree}_{+}(a^+,b^-) = \frac{-(1-z)^2}{\sqrt{z(1-z)}\,\langle ab \rangle}$$

[illegible]

STRING-BASED RULES FOR PERT. QCD

All-n master formula transformed according to ϕ^3 diagrams via two rules ('pinch' and 'loop expansion') into a Feynman parameter polynomial. (⊕ loop integrals → amplitude)

String theory important to derivation : path is straightforward
Use of rules does not require knowledge of string theory
Can be understood in ordinary field theory language
(Bern & Dunbar ; → Lessons for variety of gauge-theory calculations)

- Minimizes number of terms
- Meshes well with the spinor-helicity method
- Cancellations squeezed out at an early stage
- Systematic structure

  Reveals connections between contributions of internal states with different spins

  Allows required combination of tensor integrals to be performed in one fell swoop

  Suggests formula for subleading-color amplitudes in terms of leading one.

Superseded by unitarity-based rules for nitty-gritty of calculations, but remains useful for hints & as organizing principle.

- Color decomposition

$$\mathcal{A}^{\text{tree}}_{n+V} = g^{n-2} \sum_{\sigma \in S_{n-2}} \left(T^{a_{\sigma(3)}} \cdots T^{a_{\sigma(n)}}\right)_{i_2}^{\bar{\imath}_1} A^{\text{tree}}_n(1_q, 2_{\bar{q}}; \sigma(3..n); \ell_1 \ell_2$$

$$\mathcal{A}^{1\text{-loop}}_{n+V} = g^n \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\sigma \in S_{n-2}/S_{n;j}} Gr^{(\bar{q}q)}_{n;j}(\sigma(3..n))\, A^{1\text{-loop}}_{n;j}(1_q, 2_{\bar{q}}; \sigma(3..n); \ell_1 \ell_2$$

$$Gr^{(\bar{q}q)}_{n;1}(3..n) = N_c \left(T^{a_3} \cdots T^{a_n}\right)_{i_2}^{\bar{\imath}_1} \quad \text{leading color}$$

$$Gr^{(\bar{q}q)}_{n;j>1}(3..n) = \mathrm{Tr}\left(T^{a_3} \cdots T^{a_{j+1}}\right) \left(T^{a_{j+2}} \cdots T^{a_n}\right)_{i_2}^{\bar{\imath}_1} \quad \text{subleadi color}$$

- Spinor products $\langle ij \rangle$, $[ij]$ $\quad \langle ji \rangle [ij] = 2k_i \cdot k_j$

  $\bar{u}(k_i)\, u(k_j)$

- Unitarity

  Cut-containing parts (the bulk of the amplitude) can be determined uniquely by sewing on-shell tree amplitude, rendering the calculation vastly simpler than with traditional methods. Rational pieces can be calculated using cuts to $O(\varepsilon)$.

- Factorization in collinear limits
  Determine rational pieces.

- String-based ideas as organizational principle
  Leading-color ⇒ subleading-color; use of supersymmetric decomposition & supersymmetry identities

COLLINEAR LIMITS AT ONE LOOP

from: Bern + [illegible]

$$A_{n;1}^{[J]}(1,\ldots,n-2,a^{\lambda_a},b^{\lambda_b}) \xrightarrow{a\parallel b}$$

$$\sum_{\lambda_\Sigma=\pm} C_{-\lambda_\Sigma}^{\text{tree}}(a^{\lambda_a},b^{\lambda_b})\, A_{n-1;1}^{[J]}(1,\ldots,n-2,\Sigma^{\lambda_\Sigma}) + C_{-\lambda_\Sigma}^{[J]}(a^{\lambda_a},b^{\lambda_b})\, A_{n-1}^{\text{tree}}(1,\ldots,n-2,\Sigma^{\lambda_\Sigma})$$

i.e. tree $\times$ loop + loop $\times$ tree

$$C_+^{[1]}(++) = -\frac{[ab]}{\langle ab\rangle^2}\,\frac{\sqrt{z(1-z)}}{3}$$

$$C_+^{[1]}(++) = -C_+^{[1/2]}(++) = C_+^{[0]}(++)$$

others: $C_\lambda^{[J]}(\lambda_a,\lambda_b) = c_\Gamma\, r_\lambda^{[J]}(\lambda_a,\lambda_b)\, C_\lambda^{\text{tree}}(\lambda_a,\lambda_b)$

$$c_\Gamma = \frac{\Gamma^2(1-\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)}{16\pi^2\,\Gamma(1-2\epsilon)}$$

unrenormalized

$$r_-^{[1]}(++) = -\frac{1}{\epsilon^2}\left[\frac{\mu^2}{z(1-z)(-s_{ab})}\right]^\epsilon + 2\ln z\ln(1-z) + \frac{z(1-z)}{3} - \frac{\pi^2}{6}$$

$$r_-^{[0]}(++) = \frac{z(1-z)}{3} = -r_-^{[1/2]}(++)$$

$$r_+^{[1]}(\pm\mp) = -\frac{1}{\epsilon^2}\left[\frac{\mu^2}{z(1-z)(-s_{ab})}\right]^\epsilon + 2\ln z\ln(1-z) - \frac{\pi^2}{6}$$

$$r_+^{[0]}(\pm\mp) = 0 = r_+^{[1/2]}(\pm\mp)$$

<u>Note</u>: r^{SUSY} is independent of helicities

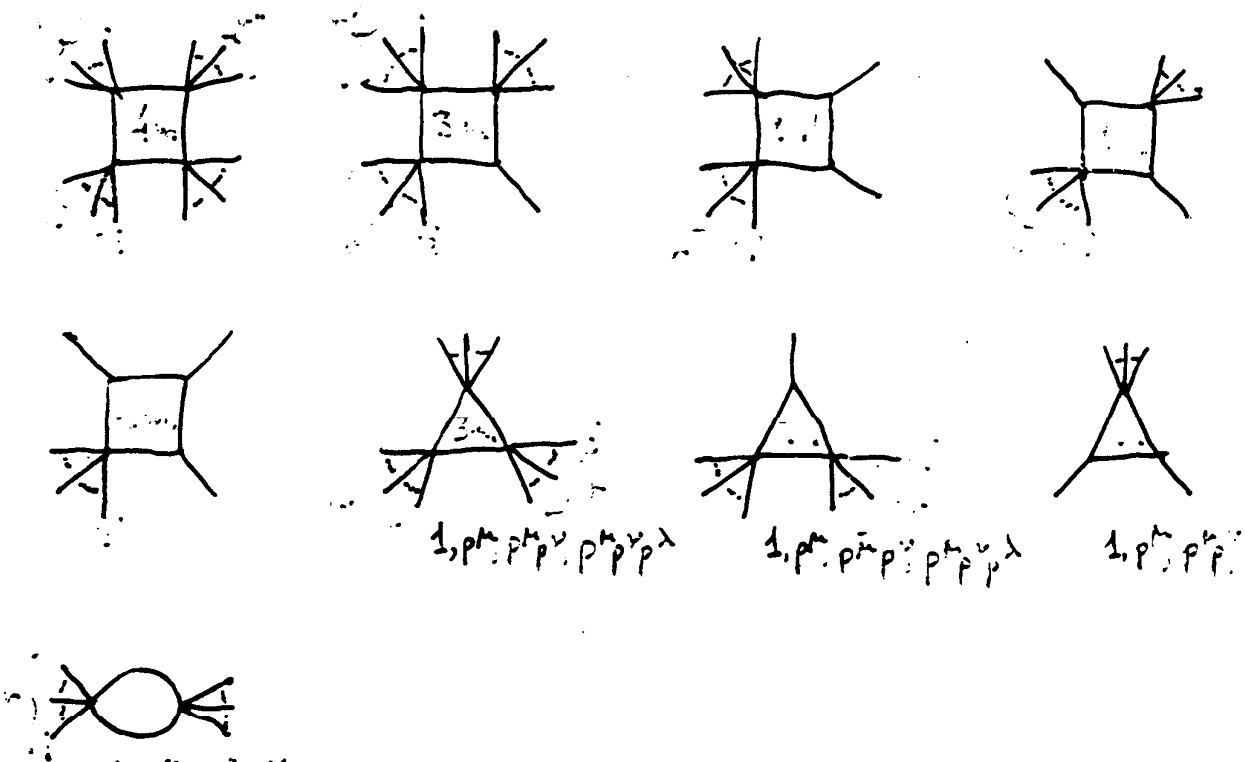
UNIQUE RECONSTRUCTION OF LOOPS

- For $n > 4$, can reduce any tensor integral to a sum of scalar boxes, tensor triangle, and tensor bubble integrals using Passarino–Veltman & van Neerven–Vermaseren reductions or equivalent techniques.

$$\Downarrow$$

- All $D = 4 - 2\epsilon$ m-tensor n-point integrals can be expressed in terms of

$\mathcal{F}_n = \{$



$$A_n = \sum_{i \in \mathcal{F}_n} c_i I_i$$

c_i ← rational function of invariants & spinor products

If, for every loop integral

$$\int \frac{d^D k}{\cdots} \; \frac{P(k^\mu)}{k^2 (k-K_1)^2 (k-K_2)^2 \cdots (k-K_{\ldots})^2}$$

the degree of $P \leqslant n-2$ $\qquad n>2$

$\leqslant 1$ $\qquad n=2$;

then A_n is determined uniquely by its cuts in $D=4$.

Equivalently, if

$$\sum_{i \mid I_i \in \mathcal{F}_n} c_i I_i \Big|_{\text{cuts}} = \sum_{i \mid I_i \in \mathcal{F}_n} c_i' I_i \Big|_{\text{cuts}}$$

Then

$$\sum_{i \mid I_i \in \mathcal{F}_n} (c_i - c_i') I_i \;(= \text{rational}) \;= 0 .$$

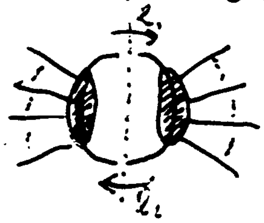
Proof via consideration of large-invariant regions & demonstration that cuts don't overlap.

METHOD OF CALCULATION

Basic idea: sew tree amplitudes not tree diagrams; extract coefficients c_i

- Look at a given channel carrying invariant $(k_i+\dots+k_{i+r-1})^2$

- Form the cut in that channel, summing over all intermediate states



$$\int d^D\mathrm{LIPS}(-\ell_1,\ell_2)\; A^{\text{tree}}(-\ell_1,\ldots,\ell_2)\; A^{\text{tree}}(-\ell_2,\ldots,\ell_1)$$

- "Promote" it to a loop integral by writing as an imaginary part,

$$\left[\int \frac{d^D\ell_1}{(2\pi)^D}\; A^{\text{tree}}(-\ell_1,\ldots,\ell_2)\frac{i}{\ell_2^2}\; A^{\text{tree}}(-\ell_2,\ldots,\ell_1)\frac{i}{\ell_1^2}\right]_{\text{cut}}$$

- Perform reductions & extract coefficient of function containing cut in this channel

- Re-assemble answer by summing over channels.

(In $N=4$ case, linear independence gives some cross-channels "for free")

In collaboration with

Zvi Bern (UCLA)
Lance Dixon (SLAC)
Dave Dunbar (Swansea)

recently,
Stefan Weinzierl (student) $Z \to q\bar{q}q'\bar{q}$

RESULTS (ONE LOOP)

Separate helicity amplitudes for $0 \to gggg$

$0 \to ggggg$

$0 \to q\bar{q}ggg$

all-n $0 \to g^+ g^+ \cdots g^+$

all-n $0 \to g^- g^+ \cdots g^+ g^- g^+ \cdots g^+$ (MHV) in $N=4$ SUSY

all-n $0 \to g^- g^+ \cdots g^+ g^- g^+ \cdots g^+$ (MHV) in $N=1$ SUSY

$0 \to gggggg$ in $N=4$ SUSY

In final stages

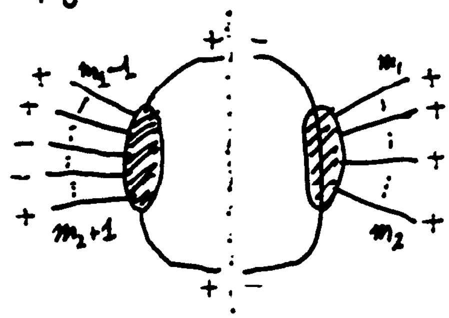
$0 \to V q\bar{q} gg$

$0 \to V q\bar{q} q'\bar{q}'$ (done + accepted in NPB)

SAMPLE CALCULATION: N=4 MHV

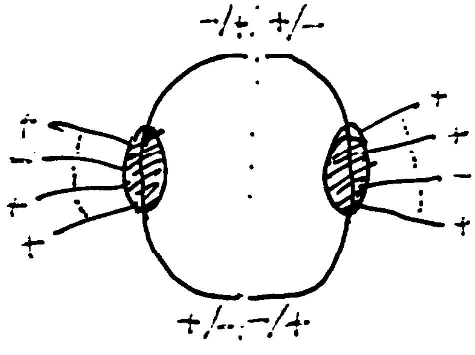
Two configurations

(a)



gluons only;
MHV trees ⇒ simple all-n
formulae available

(b)



all intermediate states;
simple formulae from
SUSY Ward identities

After summing over N=4 multiplet, integrand is identical to case (a).

$$\int d^4L \; A^{tree} \, A^{tree} = -i \, A^{tree} \int d^4L \; \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

$$= A^{tree} \sum_{1m,\, 2me} \square \cdot \text{denominator} \;\equiv\; A^{tree} \, V_n^g$$

Define for each box integral $I^{nm}_{4;r-,i}$:

$$F^{nm}_{4;r-;i} = -2\,\text{denominator}(I) \cdot I$$

Then

$$V^{g}_{2m+1} = (\mu^2)^{\epsilon} \left[\sum_{r=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n} F^{2me}_{4:r;i} + \sum_{i=1}^{n} F^{1m}_{4;i} \right]$$

$$V^{g}_{2m} = (\mu^2)^{\epsilon} \left[\sum_{r=1}^{m-2} \sum_{i=1}^{n} F^{2me}_{4:r;i} + \sum_{i=1}^{n} F^{1m}_{4;i} + \sum_{i=1}^{n} F^{[illegible]}_{[illegible]} \right]$$

Define

$$t_i^{[r]} = (k_i + \cdots + k_{i+r-1})^2$$

for all $n \geq 5$:

$$V_n^g = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{\epsilon^2}\left(\frac{\mu^2}{-t_i^{[2]}}\right)^{\epsilon} - \sum_{r=2}^{\lfloor n/2 \rfloor -1} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{-t_i^{[r]}}{-t_i^{[r+1]}}\right) \ln\left(\frac{-t_{i+1}^{[r]}}{-t_i^{[r+1]}}\right) + D_n + L_n + \frac{n\pi^2}{6} ,$$

where for $n = 2m+1$,

$$D_{2m+1} = -\sum_{r=2}^{m-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Li}_2\left[1 - \frac{t_i^{[r]} t_{i-1}^{[r+2]}}{t_i^{[r+1]} t_{i-1}^{[r+1]}}\right]\right) ,$$

$$L_{2m+1} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{-t_i^{[m]}}{-t_{i+m+1}^{[m]}}\right) \ln\left(\frac{-t_{i+1}^{[m]}}{-t_{i+m}^{[m]}}\right) ,$$

whereas for $n = 2m$,

$$D_{2m} = -\sum_{r=2}^{m-2}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Li}_2\left[1 - \frac{t_i^{[r]} t_{i-1}^{[r+2]}}{t_i^{[r+1]} t_{i-1}^{[r+1]}}\right]\right) - \sum_{i=1}^{n/2} \mathrm{Li}_2\left[1 - \frac{t_i^{[m-1]} t_{i-1}^{[m+1]}}{t_i^{[m]} t_{i-1}^{[m]}}\right] ,$$

$$L_{2m} = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{-t_i^{[m]}}{-t_{i+m+1}^{[m]}}\right) \ln\left(\frac{-t_{i+1}^{[m]}}{-t_{i+m}^{[m]}}\right) .$$

WHAT ABOUT PURE RATIONAL PIECES?

Two approaches:

a) Deduce them from collinear limits,

$$\lim_{a \parallel b} \; A_n\Big|_{cuts} + \underbrace{A_n\Big|_{rational}}_{\text{deduced}} \longrightarrow \text{Split} \cdot A_{n-1}$$

- Ambiguity at 5-pt : $\dfrac{\varepsilon(1234)}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\langle 34\rangle\langle 45\rangle}$ is collinear-finite

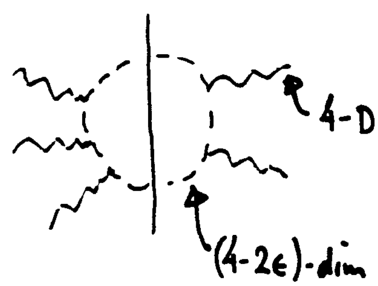
- No proof of uniqueness beyond 5-pt, but believed true.

b) Cuts at $\mathcal{O}(\epsilon)$.

A_n has an overall $s^{-\epsilon}$, so at $\mathcal{O}(\epsilon)$ the pure rational pieces do involve cuts. (logs appear).

Need tree amplitudes & loop integrals to $\mathcal{O}(\epsilon)$

explicitly   as formal objects



At one loop, momentum in $D=4-2\epsilon$ is equivalent to integrating over masses,

$$\int d^{4-2\epsilon}p \qquad \frac{1}{p^2 (p-q_1)^2 (p-q_2)^2 \cdots (p-q_{n-1})^2}$$

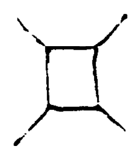
$$= \int d^4p \, (\mu^2)^{-1-\epsilon} d\mu^2 \quad \frac{1}{(p^2-\mu^2)[(p-q_1)^2-\mu^2] \cdots [(p-q_{n-1})^2-\mu^2]}$$

so we need amplitudes with one massive scalar pair, remaining legs massless.

Example. $A_4(++++)$

Need $A_4^{\rm tree}(1_s, 2^+, 3^+, 4_s) = -i \dfrac{\mu^2 [23]}{\langle 23\rangle (2k_1\cdot k_2)}$

$$\text{Absp}\big|_{s_{12}} \left[A_4^{1\text{-loop}}(1^+, 2^+, 3^+, 4^+) \right] =$$

$$\text{Absp}\big|_{s_{12}} \Big[2 \, \frac{[12][34]}{\langle 12\rangle\langle 34\rangle} \int (\mu^2)^{-1-\epsilon} d\mu^2 \quad \mu^4 \times$$  $$\Big]$$

$$= \Big[-2 \frac{[12][34]}{\langle 12\rangle\langle 34\rangle} \frac{1}{16\pi^2} \frac{\epsilon (4\pi)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)} \int da_i \, \delta(\textstyle\sum a_i - 1) \int_0^\infty d\mu^2 \frac{(\mu^2)^{1-\epsilon}}{[s a_1 a_3 + t a_2 a_4 +}$$

$$= \Big[2 \frac{[12][34]}{\langle 12\rangle\langle 34\rangle} \cdot \frac{1}{16\pi^2} \, \epsilon(1-\epsilon)(4\pi)^\epsilon \, I_4^{D=8-2\epsilon} \Big] \Big|_{s_{12}\ \text{cut}}$$

$$I_4^{D=8-2\epsilon} \sim \frac{r_\Gamma}{6\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)$$

so we obtain

$$A_4^{1\text{-loop}}(1^+, 2^+, 3^+, 4^+) = \frac{i}{48\pi^2}\frac{[12][34]}{\langle 12\rangle\langle 34\rangle} = \frac{i}{48\pi^2}\frac{[23][41]}{\langle 23\rangle\langle 41\rangle}$$

in agreement with previous explicit computations

$Z \to$ Jets

$\frac{\text{3-jet}}{\text{2-jet}}$ used in measurement of α_s

Theoretical uncertainties dominate in this extraction
$\to$ need NNLO calculation

Ingredients

- $Z \to q\bar{q}g$ at 2 loops — Hard problem
- $Z \to q\bar{q}gg$, $Z \to q\bar{q}q'\bar{q}'$ at 1 loop — Glover & Miller; Bern, Dixon, DAK, Weinzierl — in progress
- $Z \to q\bar{q}ggg$, $Z \to q\bar{q}q\bar{q}g$ at tree level — Berends, Giele & Kuijf NPB321:
- Technology for IR cancellations at NNLO in a general-purpose numerical program — generalization of Giele & Glover (PRD46:1980) — Non trivial but feasible

$Z \to$ 4 jets at NLO

Uses 2nd ingredient above; lowest order process in which gluon & quark color charges can be measured experimentally!

Can exclude light neutral colored fermions or scalars.

$$A_{4+1}^{\text{tree}}(1_{\bar q}^{-}, 2^{+}, 3^{-}, 4_{q}^{-}; 5_{\bar\ell}^{-}, 6_{\ell}^{+}) \;=$$
$$i\left[-\frac{[1\,2]\,\langle 1\,3\rangle\,\langle 4\,5\rangle\,\langle 6^{+}|(1+2)|3^{+}\rangle}{\langle 1\,2\rangle\, s_{23} t_{123} s_{56}} + \frac{\langle 3\,4\rangle\,[2\,4]\,[1\,6]\,\langle 5^{-}|(3+4)|2^{-}\rangle}{[3\,4]\, s_{23} t_{234} s_{56}} - \frac{\langle 5^{-}|(3+4)|2^{-}\rangle\,\langle 6^{+}|(1+2)|3^{+}\rangle}{\langle 1\,2\rangle\,[3\,4]\, s_{23} s_{56}}\right]$$

$$A_{4+1}(1_{\bar q}^{-}, 2^{-}, 3^{-}, 4_{q}^{-}; 5_{\bar\ell}^{-}, 6_{\ell}^{-}) = V A_{4+1}^{\text{tree}} + F_g + F_s$$

$$V = -\frac{1}{\epsilon^2}\left(\left(\frac{\mu^2}{-s_{12}}\right)^{\epsilon} + \left(\frac{\mu^2}{-s_{23}}\right)^{\epsilon} - \left(\frac{\mu^2}{-s_{34}}\right)^{\epsilon}\right) - \frac{3}{2\epsilon}\left(\frac{\mu^2}{-s_{56}}\right)^{\epsilon} - \frac{7}{2}\,.$$

$$\text{flip} = \{1 \leftrightarrow 4, \quad 2 \leftrightarrow 3, \quad 5 \leftrightarrow 6; \quad \langle\,\rangle \leftrightarrow [\,]\}\,.$$

Define some auxiliary functions.

$$\mathrm{L}_0(r) = \frac{\ln(r)}{1-r}\,, \qquad \mathrm{L}_1(r) = \frac{\mathrm{L}_0(r)+1}{1-r}\,, \qquad \mathrm{L}_2(r) = \frac{\ln(r) - \frac{1}{2}(r - 1/r)}{(1-r)^3}\,.$$

$$\mathrm{Ls}_{-1}(r_1, r_2) = \mathrm{Li}_2(1-r_1) + \mathrm{Li}_2(1-r_2) + \ln r_1 \,\ln r_2 - \frac{\pi^2}{6}\,.$$

$$\mathrm{Ls}_{-1}^{2\mathrm{m}h}(s, t; m_1^2, m_2^2) = -\mathrm{Li}_2\left(1 - \frac{m_1^2}{t}\right) - \mathrm{Li}_2\left(1 - \frac{m_2^2}{t}\right) - \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{-s}{-t}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-s}{-m_1^2}\right)\ln\left(\frac{-s}{-m_2^2}\right)$$
$$+ \left[\frac{1}{2}(s - m_1^2 - m_2^2) + \frac{m_1^2 m_2^2}{t}\right] I_3^{3\mathrm{m}}(s, m_1^2, m_2^2)\,.$$

Then

$$F_g = b_1\,\mathrm{Ls}_{-1}\Big(\frac{-s_{23}}{-t_{234}},\frac{-s_{34}}{-t_{234}}\Big) + b_2\,\mathrm{Ls}_{-1}^{2\mathrm{m}h}(s_{34},t_{123};s_{56},s_{12}) + b_4\,\mathrm{Ls}_{-1}^{2\mathrm{m}h}(s_{12},t_{234};s_{56},s_{34})$$

$$+\, b_5\,\mathrm{Ls}_{-1}\Big(\frac{-s_{12}}{-t_{123}},\frac{-s_{23}}{-t_{123}}\Big) + t\,I_3^{3\mathrm{m}}(s_{12},s_{34},s_{56})$$

$$-\,2\,\frac{\langle 1\,3\rangle\,\langle 6^+|(1+2)|3^+\rangle}{\langle 1\,2\rangle\,[5\,6]\,\langle 4^+|(2+3)|1^+\rangle}\times\left[\frac{\langle 6^+|(2+3)1|2^-\rangle}{t_{123}}\,\frac{\mathrm{Lo}\Big(\frac{-s_{23}}{-t_{123}}\Big)}{t_{123}} + \frac{[6\,4]\,\langle 4\,3\rangle}{\langle 2\,3\rangle}\,\frac{\mathrm{Lo}\Big(\frac{-s_{56}}{-t_{123}}\Big)}{t_{123}}\right]$$

$$-\,2\,\frac{[4\,2]\,\langle 5^-|(3+4)|2^-\rangle}{[4\,3]\,\langle 6\,5\rangle\,\langle 1^-|(2+3)|4^-\rangle}\times\left[\frac{\langle 5^-|(2+3)4|3^+\rangle}{t_{234}}\,\frac{\mathrm{Lo}\Big(\frac{-s_{23}}{-t_{234}}\Big)}{t_{234}} + \frac{\langle 5\,1\rangle\,[1\,2]}{[3\,2]}\,\frac{\mathrm{Lo}\Big(\frac{-s_{56}}{-t_{234}}\Big)}{t_{234}}\right],$$

$$F_{s1} = -\frac{1}{2}\,\frac{[\text{illegible}]\,\langle 1\,3\rangle}{\langle 1\,2\rangle\,\langle 2\,3\rangle\,[5\,6]\,t_{123}\,\langle 4^+|(2+3)|1^+\rangle}\left[\big(\langle 6^+|(2+3)12|3^+\rangle\big)^2\,\frac{\mathrm{Ls}\Big(\frac{[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]}\Big)}{s_{23}^2} + \big([6\,4]\,\langle 4\,3\rangle\,t_{123}\big)^2\,\frac{[\text{illegible}]}{t_{123}^2}\right.$$

$$+\,\frac{1}{2}\,\frac{[6\,2]^2}{\langle 1\,2\rangle\,[2\,3]\,[3\,4]\,[5\,6]}$$

$$F_s = F_{s1} + \mathrm{flip}(F_{s1})\,.$$

where

$$b_1 = b_5|_{\mathrm{flip}}\,,$$

$$b_2 = \frac{\langle 1\,3\rangle\,\big(\langle 6^+|(1+2)|3^+\rangle\big)^2}{\langle 1\,2\rangle\,\langle 2\,3\rangle\,[5\,6]\,t_{123}\,\langle 4^+|(2+3)|1^+\rangle} + \frac{[1\,2]^2\langle 4\,5\rangle^2\,\langle 2^+|(1+3)|4^+\rangle}{[2\,3]\,\langle 5\,6\rangle\,t_{123}\,\langle 1^+|(2+3)|4^+\rangle\,\langle 3^+|(1+2)|4^+\rangle}\,,$$

$$b_4 = b_2|_{\mathrm{flip}}\,,$$

$$b_5 = \frac{\langle 1\,3\rangle\,\big(\langle 6^+|(1+2)|3^+\rangle\big)^2}{\langle 1\,2\rangle\,\langle 2\,3\rangle\,[5\,6]\,t_{123}\,\langle 4^+|(2+3)|1^+\rangle} + \frac{[1\,2]^3\langle 4\,5\rangle^2}{[2\,3]\,[1\,3]\,\langle 5\,6\rangle\,t_{123}\,\langle 1^+|(2+3)|4^+\rangle}\,.$$

$$t = \frac{t_{123}\,(s_{56}+s_{12}-s_{34}) - 2s_{12}s_{56}}{2t_{123}}\,b_2 + \frac{1}{2}\,\frac{[1\,2]\left[\big(\langle 4^-|(1+2)(3+4)|5^+\rangle\big)^2 - s_{12}s_{34}\,\langle 4\,5\rangle^2\right]}{\langle 1\,2\rangle\,[3\,4]\,\langle 5\,6\rangle\,\langle 1^+|(2+3)|4^+\rangle\langle 3^+|(1+2)|4^+\rangle}$$

$+$ (flip of above terms).

SUMMARY

Unitarity-based rules are a powerful and efficient way of performing one-loop calculations in QCD.

Collinear limits give strong constraints on amplitudes, and simple forms for rational pieces.

They've been used to calculate a variety of processes: $0 \to q\bar{q}ggg$, $0 \to Zq\bar{q}q'\bar{q}'$, $0 \to Zq\bar{q}gg$, and all-n equations for $N=4$ + $N=1$ SUSY MHV.

Techniques are starting to be used for two-loop calculations — listen to the next talk!